

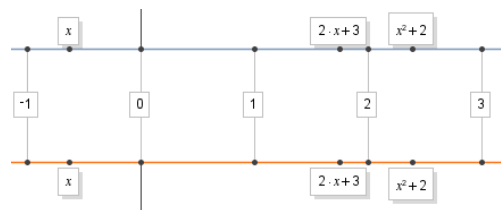
1. Titolo: Esplorare le equazioni

2. Identità Scenario

Autori: Chiappini G., Pedemonte B., Robotti E., Istituto Tecnologie Didattiche, CNR, Genova, Italy.
[chiappini, pedemonte, robotti]@itd.cnr.it

Area disciplinare : Algebra Elementare

Argomenti: uguaglianze algebriche e soluzioni di equazioni



3. Scelte didattiche e motivazionali

Problema didattico affrontato

Che cosa significa risolvere una equazione? Che cosa si intende per valore di verità di una equazione? Che cosa significa che due equazioni sono equivalenti? Che cosa è un'identità algebrica e che cosa la differenzia da un'uguaglianza condizionata?

Scopo di questo scenario è promuovere lo sviluppo concettuale e la costruzione dei significati coinvolti nel rispondere a queste domande e nella soluzione di equazioni.

Per passare dall'uso di espressioni numeriche e proposizioni dell'aritmetica all'uso di espressioni e proposizioni letterali dell'algebra elementare sono necessari importanti sviluppi concettuali. Infatti, in aritmetica, vengono usati solo numeri e simboli delle operazioni e il controllo di ciò che espressioni e proposizioni denotano può essere realizzato attraverso semplici computazioni. Nell'algebra elementare, invece, per denotare numeri in modo indeterminato vengono usate lettere e nuove concettualizzazioni sono necessarie per mantenere un controllo operativo, semantico e strutturale su ciò che espressioni e proposizioni denotano. La necessità di questo sviluppo concettuale emerge chiaramente con la costruzione della nozione di uguaglianza algebrica. Dal punto di vista morfologico, un'uguaglianza è una scrittura composta da due espressioni o da una espressione e un numero, connesse dal segno "=". Dal punto di vista semantico, l'uguaglianza denota un valore di verità (vero/falso) alla riferito all'enunciato della proposizione. Quando l'espressione(i) che compone(compongono) l'uguaglianza è(sono) strettamente numeriche, è facile verificarne il valore di verità attraverso un semplice calcolo (per esempio, $2 \cdot 3 + 2 = 8$ è vera mentre $2 \cdot 3 + 2 = 9$ è falsa). Le esperienze con le uguaglianze numeriche contribuiscono ad attribuire al segno di "=" il senso di risultato computazionale. Questo senso può costituire un ostacolo nella concettualizzazione dell'uguaglianza algebrica come relazione fra due termini. Ciò è stato messo in evidenza da molte ricerche (Arzarello et al, 2001; Filloy et al., 2000). Quando le espressioni che compongono l'equazione sono letterali, l'uguaglianza può presentare differenti significati perché il valore assunto dalla lettera può condizionare in modo diverso il valore di verità della proposizione. In questi casi il segno "=" dovrebbe suggerire di verificare le condizioni numeriche della variabile per le quali i due termini della uguaglianza sono uguali. Ci sono casi, infatti, in cui i due termini non sono uguali per qualsiasi valore della variabile, come, per esempio, nel caso $2(x+3) = 4x - 2(x-1)$. In altri casi, per interpretare una uguaglianza dal punto di vista semantico, è necessario distinguere tra equazione e identità. Il segno "=" assegna alle uguaglianze il senso di equazione quando i suoi due membri sono uguali solo per specifici valori della lettera. Invece, il segno "=" dà all'uguaglianza il senso di identità quando i suoi due membri sono uguali per qualsiasi valore numerico venga assegnato alla lettera, come per esempio nell'identità $2 \cdot x + 1 = x + (x + 1)$. Per gestire le uguaglianze algebriche, è necessario uno sviluppo concettuale relativo alle nozioni di equazione, identità, valore di verità, insieme verità ed equazioni equivalenti. Inoltre, per esprimere il modo in cui le lettere possono condizionare il valore di verità di una uguaglianza, è necessario sviluppare l'abilità di usare i quantificatori universali ed esistenziali, seppur in modo implicito.

Innovazione:

Gli errori che si presentano nella soluzione di equazioni riflettono difficoltà di natura semantica e strutturale. Per questa ragione, in questo scenario l'approccio logico e formale alla soluzione di equazioni è strettamente connesso con l'approccio quantitativo. Questa connessione ha lo scopo di costruire le competenze semantiche e strutturali necessarie per giustificare l'operatività formale. Questo scenario è centrato sull'uso del sistema AlNuSet e, in particolare, della Retta Algebrica e del Manipolatore Algebrico che sono incorporati in esso. Questo scenario sfrutta le nuove possibilità operative e rappresentative di questi due ambienti per integrare l'approccio quantitativo, logico e formale nella pratica didattica in modo da promuovere lo sviluppo concettuale e la costruzione dei significati relativi alle nozioni di uguaglianza algebrica e di soluzione di equazione.

Valore aggiunto

Molti eventi rappresentativi che emergono nella Retta Algebrica di AlNuSet possono essere messi in relazione ai concetti e alle nozioni algebriche da sviluppare. Essi possono essere efficacemente usati per verificare la preservazione dell'equivalenza nelle trasformazioni logiche e formali delle espressioni e proposizioni algebriche.

4. Contesto di implementazione**Obiettivi didattici**

Gli obiettivi didattici di questa attività riguardano lo sviluppo concettuale e la costruzione di significati in relazione alle seguenti nozioni:

- Uguaglianza condizionata;
- Soluzione di una equazione;
- Equazioni equivalenti;
- Valore di verità di una equazione;
- Insieme verità di una equazione;
- Identità algebrica.

Quali studenti?

Secondo anno della scuola superiore. Lo scenario può anche essere implementato anche nella prima superiore.

Prerequisiti degli studenti

Conoscenza base degli ambienti di AlNuSet e in particolare delle funzionalità operative e rappresentative della Retta Algebrica. In particolare, nella nostra sperimentazione questo piano pedagogico è stato sviluppato dopo 12 ore di attività su proprietà delle espressioni algebriche e di polinomi basati sull'uso di AlNuSet.

Durata

3 ore di lezione

Luogo

Il Laboratorio informatico della scuola. Gli studenti lavorano a coppie. Ciascuna coppia lavora con AlNuSet su un unico computer e fornisce una sola soluzione su un unico protocollo.

Strumenti e Risorse

Alnuset e un foglio sul quale scrivere.

AINuSet è costituito di tre ambienti strettamente legati fra loro: la Retta Algebrica, Il Manipolatore Algebrico e l'ambiente Funzioni. In questa attività vengono usati solo i primi due ambienti. Per questa ragione, nel seguito descriveremo solo l'ambiente Retta Algebrica e Il Manipolatore Algebrico. Essi rendono disponibili tecniche di natura quantitativa e simbolica per operare con espressioni e proposizioni algebriche.

La principale caratteristica della Retta Algebrica è la possibilità di rappresentare una variabile algebrica come un punto mobile sulla retta, cioè un punto che può essere trascinato con il mouse lungo la retta. Quando si trascina il punto mobile lungo la retta, tutte le espressioni algebriche dipendenti da quella variabile si muovono sulla retta in accordo al valore assunto da essa. Questa caratteristica operativa e rappresentativa della Retta Algebrica consente di esplorare sia proprietà delle espressioni algebriche che relazioni fra esse. Inoltre, in questo ambiente sono disponibili tecniche di natura quantitativa per trovare le radici dei polinomi a coefficienti interi e per esplorare e validare i valori di verità di una proposizione algebrica. Osserviamo che gli eventi rappresentativi sopradescritti sono di grande importanza per gli obiettivi didattici di questo scenario:

- L'appartenenza delle due espressioni allo stesso post-it può essere connessa alla nozione di uguaglianza e equivalenza fra espressioni. Infatti, l'appartenenza delle due espressioni allo stesso post-it (per un valore assunto dalla variabile sulla retta) è indice della loro uguaglianza. Se due espressioni sono contenute nello stesso post-it per tutti i valori assunti dalla variabile sulla retta, esse sono equivalenti.
- Gli eventi rappresentativi che emergono con l'applicazione della funzione E=0 al polinomio rappresentato sulla retta e il trascinamento della variabile sulla retta, possono essere connessi alla nozione di radice del polinomio (vedere il compito 4)
- La concordanza di colore tra il marcatore associato alla proposizione e il marcatore associato all'insieme numerico costruito dall'utente, può essere connessa alla nozione di insieme verità della proposizione e può essere usata per validare l'insieme numerico costruito come insieme verità della proposizione.

La principale caratteristica del Manipolatore Algebrico è la possibilità di operare con espressioni e proposizioni algebriche in modo logico e formale attraverso un insieme strutturato di comandi di manipolazione che preservano l'equivalenza attraverso la trasformazione della loro forma (Fig. 1). Questi comandi corrispondono alle proprietà base delle operazioni, alle proprietà delle equazioni e disequazioni, alle operazioni logiche fra proporzioni e alle operazioni fra insiemi. Un'altra caratteristica del Manipolatore è la possibilità di creare una nuova regola di trasformazione (regola utente) una volta che questa regola è stata provata. L'utente può facilmente controllare l'intero processo della trasformazione algebrica fruttando i feedback dati dal sistema. Inoltre, l'utente può verificare la preservazione dell'equivalenza nella trasformazione rappresentando le forme trasformate sulla Retta Algebrica.

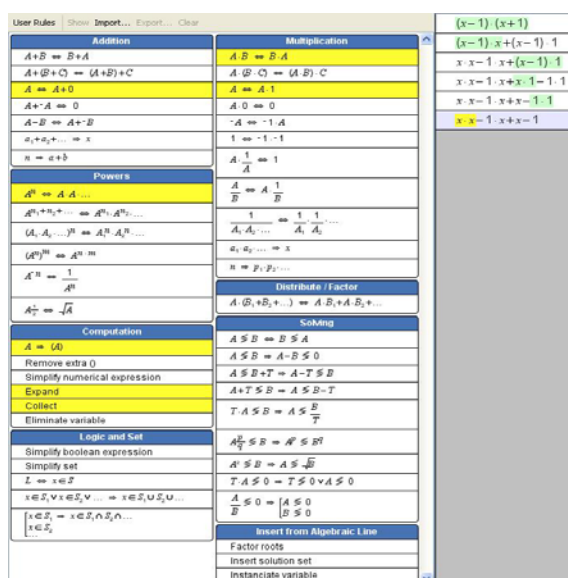


Fig. 1 Manipolazione simbolica dell'espressione $(x-1) \cdot (x+1)$ per mezzo delle regole disponibili sull'interfaccia del Manipolatore Algebrico di AINuSet rispetto alla parte selezionata dell'espressione.

Tipi di attività

Le possibilità operative e rappresentative dell'ambiente Retta Algebrica sono state sfruttate per progettare attività di tipo esplorativo volte alla costruzione di significati per le nozioni coinvolte nella soluzione delle equazioni di secondo grado.

5. Svolgimento delle attività

Questo scenario è composto da sette attività riguardanti la soluzione di equazioni di secondo grado. La formula per risolvere le equazioni di secondo grado non è richiesta. Per ciascuna attività presentiamo il compito assegnato allo studente e descriviamo il ruolo di mediazione dello strumento usato (cioè AlNuSet).

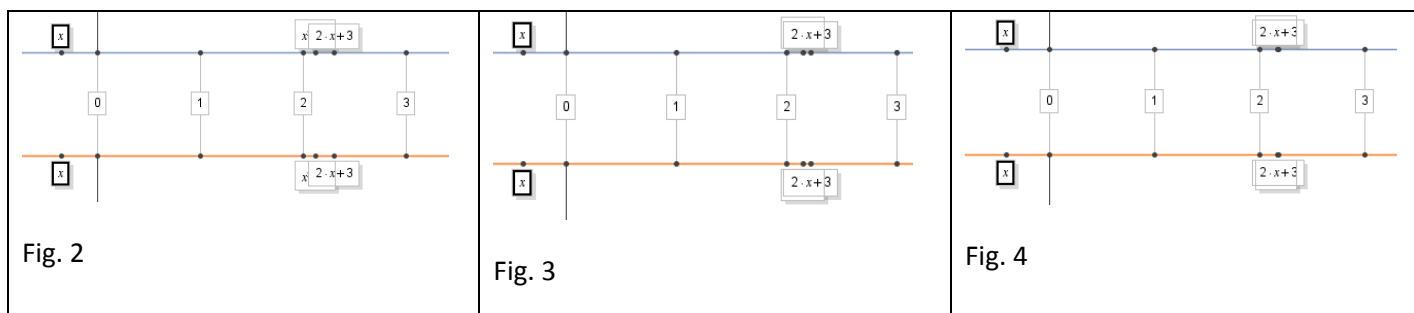
Attività 1

Considera i seguenti due polinomi: x^2+2 ; $2*x+3$. Spiega che cosa significa secondo te mettere il segno di uguale tra i due polinomi o, in altre parole, come interpreti la seguente scrittura $x^2+2=2*x+3$. Rappresenta sulla Retta Algebrica di AlnuSet le due espressioni x^2+2 e $2*x+3$ e muovi lungo la retta il punto corrispondente a x per verificare le tue ipotesi.

Strumenti e risorse

La prima parte del compito consente agli studenti di esplicitare le loro concezioni relative alla nozione di uguaglianza algebrica. La ricerca ha messo in luce che molti studenti attribuiscono al segno "=" il significato di risultato computazionale. Coerentemente con questo significato, ci aspettiamo che il segno di uguale fra le due espressioni possa suggerire che il calcolo relativo ai due termini dell'equazione debba produrre lo stesso risultato per qualsiasi valore della variabile x .

La seconda parte del compito ha lo scopo di mettere in discussione questa misconcezione e di costruire l'idea che l'uguaglianza fra due membri è condizionata dal valore di x . Quindi, questa seconda parte del compito si focalizza sull'uso di AlNuSet. Agli studenti viene chiesto di muovere il punto mobile x lungo la retta e di osservare che i punti corrispondenti alle due espressioni si muovono in accordo con il valore assunto dalla variabile. In questo modo, gli studenti hanno la possibilità di osservare che ci sono solo due valori di x per cui i punti delle due espressioni sono vicini, quasi coincidenti (Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4).



Poiché questi valori della variabile sono irrazionali e devono essere costruiti sulla retta, gli studenti non possono verificare direttamente che le due espressioni coincidono sullo stesso punto e che appartengono allo stesso post-it (Fig. 5).

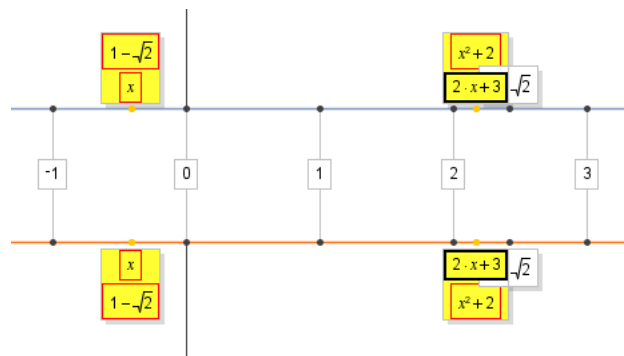


Fig. 5 Per $x=1-\sqrt{2}$ la proposizione $x^2+2=2\cdot x+3$ è vera. In altre parole, quando x assume il valore $1-\sqrt{2}$ l'espressione x^2+2 e $2\cdot x+3$ corrispondono allo stesso punto e appartengono allo stesso post-it.

La tecnica mediata da Alnuset per trovare questi valori irrazionali richiede di trasformare l'equazione $x^2+2=2\cdot x+3$ nella sua forma canonica ($x^2-2\cdot x-1=0$), di rappresentare il polinomio associato sulla retta e di usare il comando E=0 per trovare le radici di questo polinomio. La trasformazione dell'equazione nella forma canonica si realizza nel Manipolatore Algebrico di Alnuset ed è guidata dal compito seguente.

Attività 2

Seleziona l'equazione $x^2+2=2\cdot x+3$ e usa la regola $A = B \Leftrightarrow A-B = 0$ del Manipolatore Algebrico per trasformarla. Traduci il risultato prodotto dalla regola in linguaggio naturale.

Strumenti e risorse

Questo compito focalizza l'attenzione sulla regola $A = B \Leftrightarrow A-B = 0$ del Manipolatore Simbolico attraverso la quale è possibile trasformare l'uguaglianza preservandone l'equivalenza. Una volta che la regola è applicata alla proposizione $x^2+2=2\cdot x+3$, il Manipolatore Algebrico dà all'utente la possibilità di trasformare la proposizione $x^2+2-(2\cdot x+3)=0$ mediante le seguenti due modalità:

1. usare le regole disponibili sull'interfaccia per trasformare passo dopo passo l'espressione $x^2+2-(2\cdot x+3)$ nell'espressione $x^2-2\cdot x-1$ (Fig. 6)
2. usare la regola computazionale "Semplifica" mediante la quale l'espressione $x^2+2-(2\cdot x+3)$ è automaticamente trasformata nell'espressione $x^2-2\cdot x-1$ (Fig. 7)

La scelta fra queste due modalità dipende dagli obiettivi che l'insegnante vuole perseguire e dalla capacità degli studenti di controllare il risultato prodotto dal computer nelle due modalità. Chiaramente, la prima strategia ha bisogno di più tempo per essere realizzata.

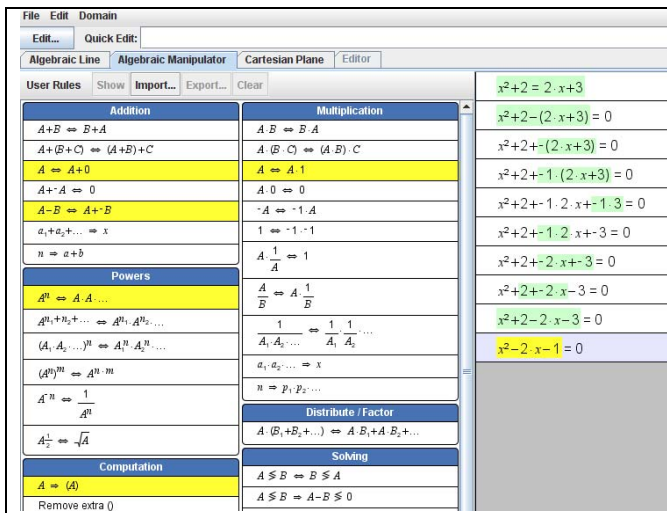


Fig.6

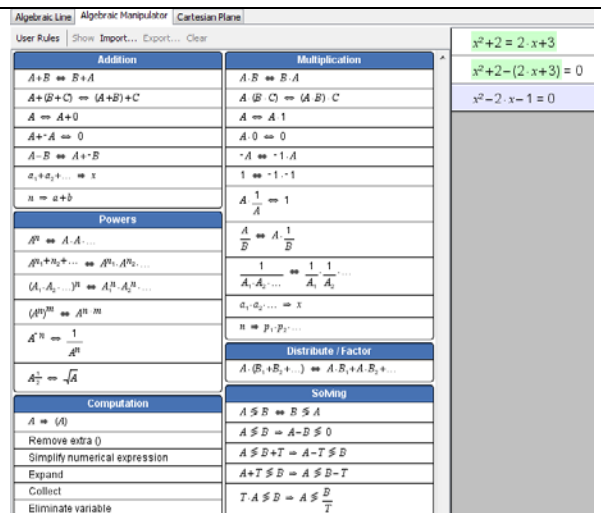


Fig.7

Attività 3

Se trascini x lungo la retta, che cosa pensi possa accadere ai punti corrispondenti a $x^2-2 \cdot x-1$ e a 0 quando i punti corrispondenti a x^2+2 e a $2 \cdot x+3$ sembrano essere coincidenti? Fai un'ipotesi sulla relazione che c'è fra il polinomio $x^2-2 \cdot x-1$ e 0 e i polinomi x^2+2 e $2 \cdot x+3$ e cerca di giustificarla. Usa la Retta Algebrica per verificare la tua ipotesi.

Strumenti e risorse

Questo compito ha lo scopo di presentare agli studenti la nozione di equazioni equivalenti in modo che capiscano che due equazioni sono equivalenti quando sono vere per gli stessi valori della variabile. Infatti, sfruttando il trascinamento della variabile lungo la retta, è sufficiente trovare i valori di x per cui $x^2-2 \cdot x-1$ è uguale a 0 . Questa esperienza è cruciale per sviluppare la nozione di equazioni equivalenti (Fig. 8, Fig. 9, Fig 10).

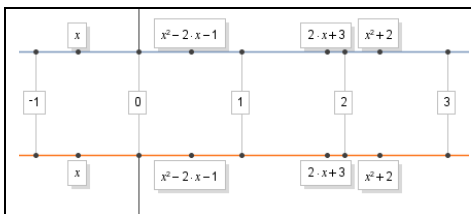


Fig. 8

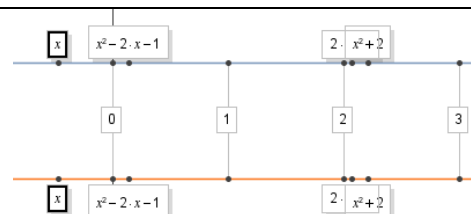


Fig. 9

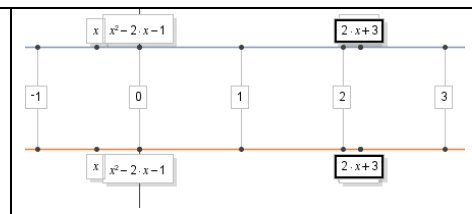


Fig. 10

Inoltre, questa esperienza è cruciale per giustificare la necessità della trasformazione simbolica dell'equazione. A questo scopo è importante notare che AlNuSet, attraverso il comodo $E=0$, rende disponibili una tecnica quantitativa che consente all'utente di trovare le radici del polinomio associato alla forma canonica dell'equazione.

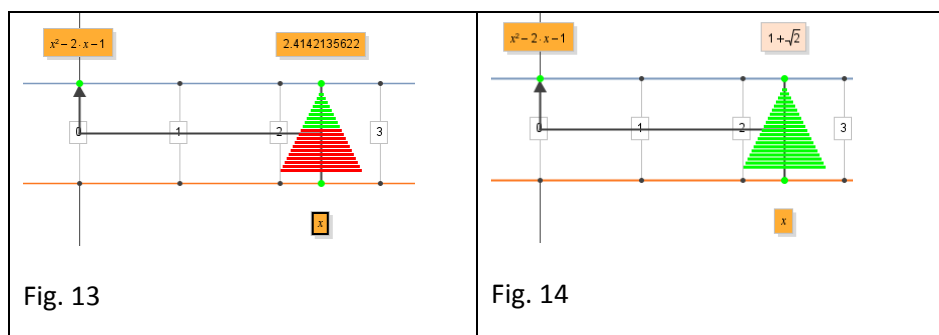
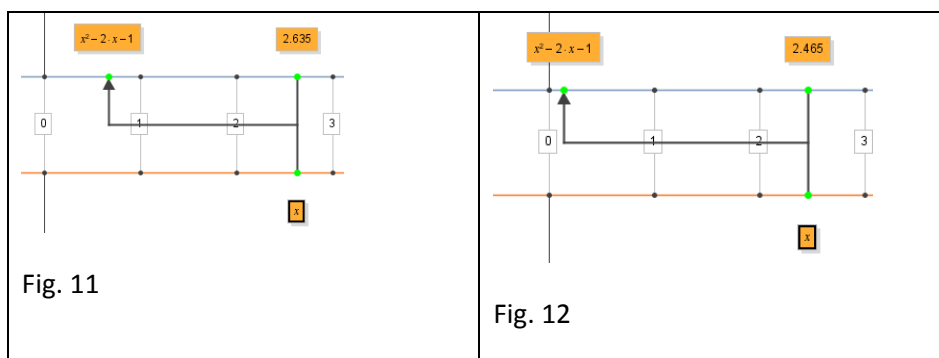
Attività 4

Dal Manipolatore Algebrico invia l'equazione $x^2-2 \cdot x-1=0$ e il polinomio $x^2-2 \cdot x-1$ nella Retta Algebrica di Alnuset. Usa il comando $E=0$ per trovare i valori di x che rendono il polinomio $x^2-2 \cdot x-1$ uguale a 0 .

Strumenti e risorse

Il comando $E=0$ mette a disposizione una tecnica quantitativa e dinamica per trovare le radici di un polinomio a coefficienti interi. Questa tecnica consiste nell'applicare il comando al polinomio e nel trascinare il punto variabile

lungo la retta per approssimare il valore del polinomio a zero (Fig. 11 e Fig. 12). Quando tale approssimazione viene realizzata, il controllo della procedura passa al sistema che fornisce un feedback grafico (Fig. 13) e calcola il valore esatto della radice del polinomio (fig. 14) che viene ad un punto sulla retta.



Una volta che le radici irrazionali sono state trovate, gli studenti possono verificare che, per quei valori di x , il punto corrispondente a $x^2 - 2x - 1$ è coincidente a 0. Inoltre, gli studenti possono verificare che per quegli stessi valori di x le espressioni $x^2 + 2$ e $2x + 3$ corrispondono ad uno stesso punto e appartengono allo stesso post-it.

Attività 5

Usa la funzione "Edit Set" della Retta Algebrica per definire l'insieme dei valori che rendono vera l'uguaglianza $x^2 - 2x - 1 = 0$. Sposta la variabile x lungo la retta per verificare la correttezza dell'insieme verità che hai costruito.

Strumenti e risorse

Sulla Retta Algebrica di Alnuset le espressioni sono rappresentate associate a punti mentre le uguaglianze sono rappresentate in una finestra specifica, chiamata "sets", e sono associate a un marcatore il cui colore (rosso/verde) è gestito automaticamente dal sistema: il marcatore è verde (Fig. 16) se, per il valore assunto dalla variabile sulla retta, l'uguaglianza è vera, al contrario il marcatore è rosso (Fig. 15) se per tale valore l'uguaglianza è falsa. La possibilità di spostare il punto variabile sulla retta consente agli studenti di esplorare il valore di verità dell'uguaglianza e di costruire un significato per questa nozione.

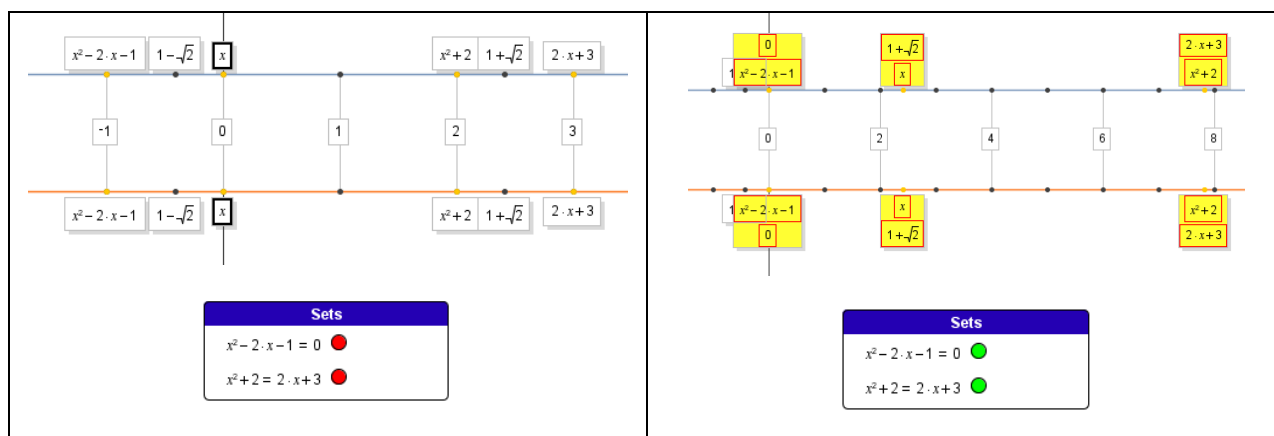


Fig. 15

Fig. 16

Per fare esperienza e costruire la nozione di insieme verità di una equazione possono essere sfruttate altre due funzioni disponibili nella componente Retta Algebrica di Alnuset: un editore grafico, che consente di costruire l'insieme verità di una equazione, e un particolare feedback del sistema, che consente di validare insieme costruito. Una volta che le radici del polinomio sono state rappresentate sulla retta, l'utente può usare un editore grafico che consente di costruire l'insieme verità dell'equazione corrispondente (Fig. 17). Tale editore consente all'utente di operare sulla retta e di definire l'insieme numerico che rende vera l'uguaglianza. Il sistema tradurrà automaticamente tale insieme nella notazione formale insiemistico degli insiemi (Fig 18).

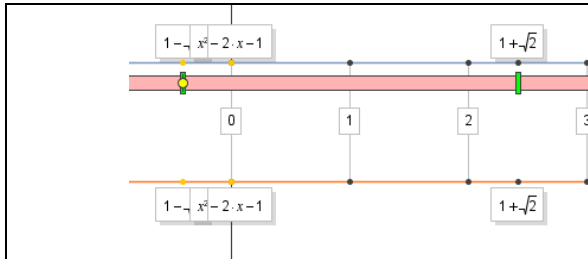


Fig. 17

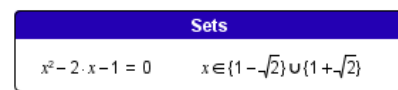


Fig. 18

L'insieme verità di una proposizione così costruito può essere validato sfruttando i marcatori colorati. Infatti, spostando la variabile lungo la retta, la concordanza di colore tra il marcatore associato alla proposizione e quello associato all'insieme costruito consente all'utente di verificare che tale insieme è l'insieme verità della proposizione (Fig. 19 e Fig. 20). Inoltre, il processo di validazione può essere supportato da feedback di natura quantitativa (vedi post-it) che il sistema fornisce in relazione alla posizione della variabile e del polinomio sulla retta durante lo spostamento di x .

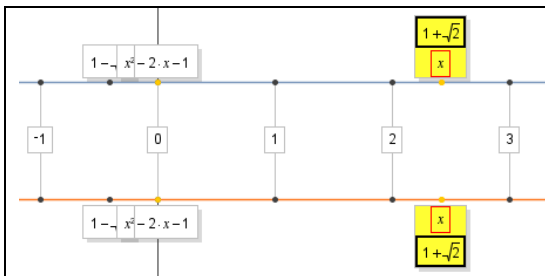


Fig. 19

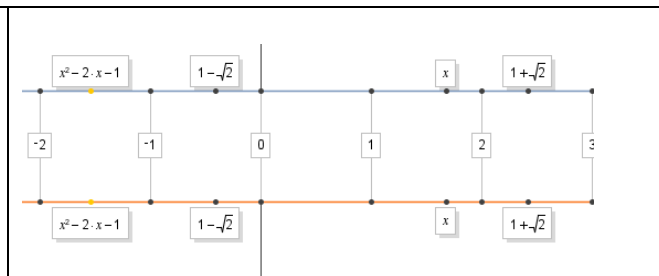


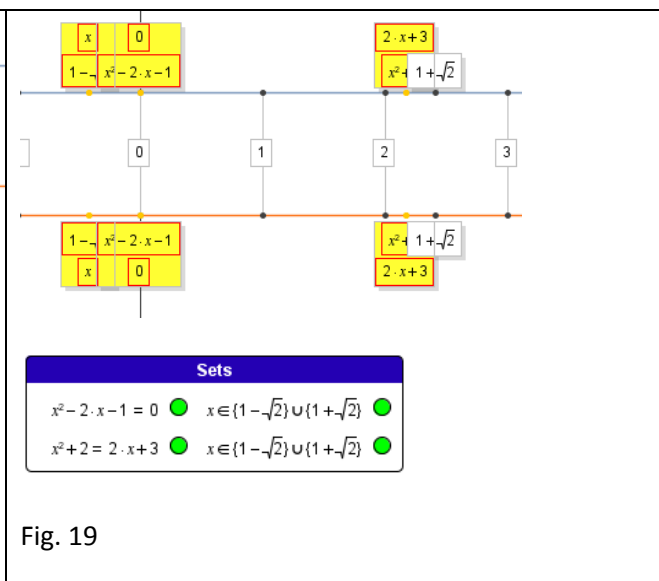
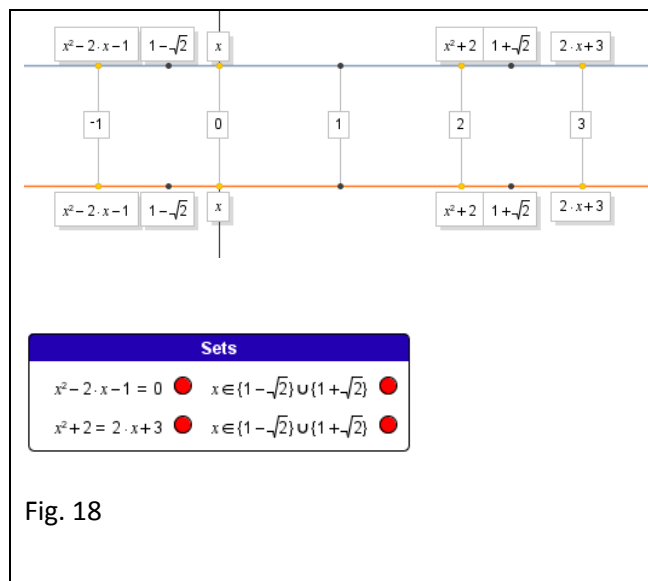
Fig. 20

Attività 6

Spiega quale è la relazione tra la soluzione dell'equazione $x^2 - 2x - 1 = 0$ e quella dell'equazione $x^2 + 2 = 2x + 3$. Senza usare la Retta Algebrica di Alnuset, scrivi ciò che pensi della frase seguente: "Nella Retta Algebrica di Alnuset, le espressioni appartenenti ai due termini dell'uguaglianza $x^2 - 2x - 1 = 0$ (o $x^2 + 2 = 2x + 3$) appartengono allo stesso post-it per i valori di x che sono soluzioni dell'equazione." Usa quindi la Retta Algebrica per verificare e giustificare la tua risposta.

Strumenti e risorse

Questo compito ha lo scopo di orientare verso l'istituzionalizzazione delle nozioni di uguaglianza condizionata e di equazioni equivalenti. La frase proposta presenta una misconcezione comune che riguarda le equazioni equivalenti: due equazioni sono equivalenti quando tutti i suoi membri sono uguali per particolari valori della variabile. L'uso di AlNuSet ha lo scopo di destabilizzare tale misconcezione e di focalizzare l'attenzione sul fatto che equazioni equivalenti sono caratterizzate dallo stesso insieme verità. Spostando la variabile x lungo la retta (Fig. 21), gli studenti possono verificare dinamicamente che solo per i valori di x corrispondenti a $1 + \sqrt{2}$ e a $1 - \sqrt{2}$ (Fig22) c'è concordanza di colore verde fra i marcatori associati alle equazioni e quelli associati ai loro rispettivi insiemi di verità. Inoltre essi possono verificare che per quegli stessi valori di x il punto corrispondente a x^2+2 coincide con il punto corrispondente a $2 \cdot x+3$ e $x^2-2 \cdot x-1$ coincide con 0.



Poiché lo scopo principale dell'attività è quello di sviluppare un controllo semantico, operativo e strutturale su espressioni e proposizioni, è necessario che gli studenti siano in grado di distinguere l'uguaglianza condizionata dall'identità algebrica. I compiti precedenti sono stati progettati perché gli studenti potessero appropriarsi della nozione di equazione come uguaglianza condizionata. Il compito 7 ha invece lo scopo di introdurre la nozione di identità algebrica.

Attività 7

Che cosa puoi dire dell'insieme verità di una uguaglianza che ha due espressioni equivalenti come suoi membri? Scrivi la tua ipotesi.

Considera l'uguaglianza seguente:

$$x^2 + 1 = (x-1)^2 + 2 \cdot x$$

Usa la Retta Algebrica e il Manipolatore Simbolico di AlnuSet per verificare la tua ipotesi.

Strumenti e risorse

Lo scopo della prima parte del compito è quella di far emergere le ipotesi degli studenti circa l'uguaglianza fra due espressioni equivalenti. Per fare ciò, gli studenti hanno bisogno di usare tutte le nozioni apprese con questo percorso didattico (valore di verità di un'equazione, insieme verità di un'equazione, equazioni equivalenti). Nella seconda parte del compito, facendo riferimento ad una particolare uguaglianza algebrica, viene chiesto agli studenti di validare l'ipotesi formulata usando AlNuSet. Questa attività richiede di verificare l'ipotesi sia sul piano quantitativo, usando la Retta Algebrica, sia su quello logico e formale, usando il Manipolatore.

Sulla Retta Algebrica gli studenti sperimentano che trascinando il punto variabile lungo la retta:

- i punti corrispondenti alle espressioni x^2+1 e $(x-1)^2+2*x$ sono coincidenti e le due espressioni appartengono allo stesso post-it.
- Il colore del marcatore associato all'uguaglianza $x^2+1=(x-1)^2+2*x$ è sempre verde
- E' mantenuta la concordanza del colore verde fra il marcatore corrispondente all'uguaglianza $x^2+1=(x-1)^2+2*x$ e quello corrispondente all'insieme di verità costruito (Fig. 23)

Sets

$$x^2 + 1 = (x - 1)^2 + 2 \cdot x \quad x \in] - \infty, + \infty [$$

Fig 23 Concordanza del colore verde fra il marcatore corrispondente all'uguaglianza $x^2+1=(x-1)^2+2*x$ e quello corrispondente all'insieme di verità costruito "tutti i valori di x "

Inoltre, nel manipolatore Algebrico gli studenti possono trasformare l'equazione dimostrando la verità dell'uguaglianza.

$$\begin{array}{l} x^2 + 1 = (x - 1)^2 + 2 \cdot x \\ x^2 + 1 = x^2 - 2 \cdot x + 1 + 2 \cdot x \\ x^2 + 1 = x^2 + 1 \\ x^2 + 1 - (x^2 + 1) = 0 \\ 0 = 0 \\ \text{True} \end{array}$$

Fig. 24.

Attraverso il comando "Inserisci insieme soluzione" (Fig. 25) che può essere applicato all'equazione solo se l'utente ha preventivamente costruito l'insieme verità dell'uguaglianza sulla Retta Algebrica, è possibile esprimere la soluzione nella notazione degli insiemi.

$$\begin{array}{l} x^2 + 1 = (x - 1)^2 + 2 \cdot x \\ x \in] - \infty, + \infty [\end{array}$$

Fig. 25

Organizzazione dell'attività in classe

Questa sequenza di attività è stata progettata per consentire agli studenti di lavorare in coppia in modo collaborativo. Pensiamo che attraverso questa organizzazione dell'attività sia possibile creare situazioni favorevoli per la discussione, la formazione e la verifica di ipotesi, lo sviluppo e la negoziazione di strategie. Inoltre, attraverso le attività progettate gli studenti possono essere facilmente coinvolti in discussioni orchestrate dall'insegnante per condividere le idee con altri gruppi, per confrontare le strategie di soluzione o per interpretare gli eventi rappresentativi che emergono nell'uso di AlNuSet.

Suggerimenti per la valutazione

Al termine della sequenza di attività, suggeriamo di assegnare agli studenti altre equazioni di secondo grado con la richiesta di trovare le loro soluzioni spiegando i passi di soluzione eseguiti nella Retta Algebrica e nel Manipolatore e giustificandoli sia dal punto di vista operativo che da quello semantico.

6. Esempi tratti dall'attività in classe

Per fornire una idea sul ruolo di mediatore che la Retta Algebrica gioca nella costruzione dei significati algebrici, consideriamo ad esempio alcuni risultati tratti dalla nostra sperimentazione e relativi all'attività 1 e all'attività 5.

Nelle risposte degli studenti al compito 1, molti studenti attribuiscono al segno di "=" il significato di risultato computazionale, nonostante abbiano in precedenza già affrontato la soluzione di equazioni di primo grado. Una risposta tipica degli studenti è: *"mettere il segno di uguale tra due espressioni polinomiali significa che queste espressioni hanno lo stesso risultato"*. Per molti studenti inserire il segno di uguale fra due espressioni suggerisce l'idea che, assegnato un certo valore alla variabile, il risultato computazionale dei due termini debba essere uguale.

Nella domanda seguente gli studenti devono rappresentare le due espressioni sulla retta algebrica di AlNuSet per verificare le loro risposte. Trascinando il punto mobile lungo la retta (e osservando che i punti corrispondenti alle due espressioni si muovono in base al valore assunto dalla variabile sulla retta), tutti gli studenti hanno osservato che ci sono solo due valori di x per cui i punti delle due espressioni sono vicini l'uno all'altro, quasi coincidenti. Attraverso questa esplorazione gli studenti sperimentano che l'uguaglianza delle due espressioni è condizionata dal valore numerico della variabile, e questo si è rivelato cruciale per sviluppare la nozione di uguaglianza condizionata. Nelle precedenti attività con AlNuSet, gli studenti hanno sperimentato che ogni punto della retta algebrica è associato ad un post-it che contiene tutte le espressioni costruite dall'utente che denotano quel punto. Per verificare l'uguaglianza delle due espressioni, gli studenti cercano di trovare i valori di x per cui le espressioni appartengono allo stesso post-it. Poiché questi valori sono irrazionali e devono essere costruiti sulla retta, gli studenti non possono verificare questo direttamente: *"non capiamo quel è il numero... potrebbe essere 2 virgola qualche cosa... anche se usiamo la funzione di zoom non riusciamo a trovare il valore..."*. La costruzione della soluzione è effettuata nelle attività successive.

7. Possibili estensioni

Sono possibili diverse estensioni a livello curricolare. Qui ne suggeriamo due che possono essere di grande interesse la prospettiva didattica:

* usare il Manipolatore Algebrico di AlNuSet per dimostrare la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado con lo scopo di creare una nuova regola di soluzione che potrà essere successivamente usata in altre attività.

* Usare la Retta Algebrica di AlNuSet e il Manipolatore per risolvere equazioni di secondo grado con parametro e per discutere la soluzione sulla base dei valori assunti dal parametro

8. Ringraziamenti

Questo piano pedagogico è stato sviluppato e implementato nel quadro di ReMath (Representing Mathematics with Digital Media, Sixth Framework Programme, IST-4, Information Society Technologies, Project Number: IST4-26751, <http://remath.cti.gr>) nel Liceo classico "D'Oria" di Genova, Italia.

9. Bibliografia

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., (2001), A Model for analysing algebraic processes of thinking, in R. Sutherland et al. (Eds.), *Perspective on school algebra*, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 61-81.

Chiappini G., Robotti E., Role of an artefact of dynamic algebra in the conceptualisation of the algebraic equality, CERME 6, Lyone 2008

Chiappini G.P., Pedemonte B., Robotti E., Using Alnuset to construct the notions of equivalente and equality in algebra , Kendall M. and Samways B (eds) , *Learning to Live in the Knowledge Society*, vol.281, 345-348, Springer Sci.Business Media, N.Y., 2008

Fillooy E., Rojano T., Rubio G. (2000). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebra problems. In R. Sutherland et al. (Eds.), *Perspectives on school algebra*, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, pp. 155-176.

Pedemonte B., Chiappini G. (2008) ALNUSET: a system for teaching and learning algebra *International Journal of Continuing Engineering Education and Life-Long Learning (IJCELL)* 18 5/6 Inderscience Publishers, 627 - 639.