

PERCORSO DIDATTICO di MATEMATICA

PER CONOSCERE LE DISEQUAZIONI E I METODI PER LA LORO RISOLUZIONE

ambito disciplinare

Matematica

contesto

Media Superiore

prerequisiti

- Numeri reali
- Disuguaglianze tra numeri
- Equazioni
- Rappresentazione della risoluzione di equazioni sul piano cartesiano

contenuti

- Risoluzione di problemi
- Disequazioni e sistemi di disequazioni
- Calcolo algebrico
- Interpretazione geometrica della risoluzione di disequazioni

strumenti

- Laboratorio multimediale
- Software didattico
- Calcolatrice tascabile
- Libri di testo

metodologie

- Problem solving
- Lezione
- Esercitazione
- Gioco in autovalutazione

tempi

Una stima approssimativa dei tempi per lo svolgimento di tutte le attività è di circa 15 ore.

E' escluso il tempo necessario per la padronanza dei software utilizzati.

L'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore dovrebbe contribuire alla crescita intellettuale ed alla formazione critica dei giovani. Dal lavoro della *Commissione dei Saggi* è possibile evincere una serie di osservazioni significative sullo stato di salute della matematica nel nostro paese. Sembra essere opinione abbastanza condivisa che all'origine della degenerazione di questo sapere ci sia fondamentalmente un problema di metodologia. Lo stesso *R. Maragliano* invita a riservare, sul piano metodologico, all'insegnamento della matematica una attenzione particolare indicando come essenziale che *"bambini e ragazzi non perdano il piacere del matematizzare, non siano demotivati da eccessi di formalismo e siano aiutati dagli insegnanti e dagli stessi compagni a pensare a percorsi alternativi di soluzione e ad utilizzare in positivo le dinamiche degli eventuali errori"*.

La seguente proposta di lavoro più che a sviluppare contenuti mira a suggerire un approccio metodologico più costruttivo al sapere matematico, che ripristini il piacere di matematizzare, ovvero di usare e applicare la matematica per la soluzione di problemi quotidiani e non, senza però escludere la componente pratica della matematica, ovvero l'attività esercitativa volta al consolidamento delle nozioni apprese e alla padronanza del calcolo.

Si propone così un insegnamento condotto per problemi: si prospetta una situazione problematica stimolante per i giovani, si passa alla formulazione di ipotesi di soluzione, si avvia la ricerca di un procedimento risolutivo che scopra le relazioni matematiche, e che porti infine alla generalizzazione e formalizzazione del risultato. Il software didattico viene qui utilizzato per le attività esercitative e per la rappresentazione grafica della risoluzione del problema.

ESEGUI IL PERCORSO

Obiettivo 1 Matematizzare semplici situazioni tramite equazioni e disequazioni

Per il raggiungimento dell'obiettivo è consigliato svolgere le attività nella sequenza con cui sono proposte

Attività 1 Discussione collettiva di semplici situazioni riferite alla comune esperienza e ad altri ambiti disciplinari, rappresentabili tramite equazioni o disequazioni.

Attività 2 Esposizione della definizione algebrica delle forme di disequazioni.

Attività 3 Verifica.

Presentare alla classe, in linguaggio naturale, semplici situazioni problematiche riferite alla comune esperienza e/o ad altri ambiti disciplinari, es. fisica e geometria, la cui rappresentazione possa essere modellizzata con una equazione o una disequazione.

Orientare la riflessione collettiva sulla possibilità di risolvere problemi risolvendo la loro rappresentazione e stimolare gli allievi a determinare tale **modello** risolutivo per alcuni problemi esposti, guidandoli nelle varie fasi del processo.

Giungere fino alla composizione della formula risolutiva, equazione o disequazione, dove i dati siano espressi in funzione dell'incognita scelta.

FASI DEL PROCESSO DI MODELLIZZAZIONE DI UN PROBLEMA

1. individuazione esplicita dell'obiettivo del problema;
2. individuazione dei dati del problema, in modo che siano evidenziate le relazioni suggerite dalla esposizione del problema;
3. scelta dell'incognita e di conseguenza determinazione del dominio dell'incognita.

Esempi di problemi possono essere inventati o tratti dai libri di testo.

Proponiamo qui sotto un esempio di modellizzazione di un problema

PROBLEMA

Una famiglia intende spendere per le vacanze estive al massimo $2/5$ dell'entrata mensile mantenendo un residuo pari a 1000 euro (2 milioni di lire) da utilizzare al rientro a casa. Quale è l'entrata mensile della famiglia?

MODELLIZZAZIONE DEL PROBLEMA POSTO

1. obiettivo: calcolare l'entrata mensile della famiglia, in euro

2. dati:

- soldi da spendere in vacanza = $2/5$ dell'entrata mensile della famiglia
- soldi rimanenti = 1000 euro

3. incognita:

- x = l'entrata mensile della famiglia
- dominio di x = i numeri reali

A questo punto i dati possono essere espressi come

$$2/5x, 1000$$

e la formula che rappresenta il problema originale risulta

$$x - 1000 \leq 2/5 x$$

L'insegnante espliciti la definizione di disequazione algebrica ad esempio in termini di

diseguaglianza tra due espressioni algebriche contenenti una variabile, detta anche incognita, di solito indicata con x

Specificare, esemplificandole, le tipologie di disequazioni: intera, frazionaria, lineare, di grado n , sistemi di disequazioni.

3.a Si intende verificare la comprensione del concetto di matematizzazione di un problema, invertendo il processo presentato in classe. Dividere la classe in due gruppi che si sfideranno a turno. Facciamo sfidare i due gruppi creati che a turno, magari aiutandosi con un libro, dovranno individuare il problema, o la classe di problemi, risolubile/i con la equazione o disequazione proposta dall'altro gruppo.

Un esempio

Data la equazione lineare nell'incognita x :

$$x - 10 = 3x$$

il problema che rappresenta potrebbe essere:

trovare il numero tale che sottraendogli 10 il numero è uguale al suo triplo.

3.b Con la seguente attività si intende verificare l'acquisizione consapevole delle definizioni algebriche date. Dividere la classe in due gruppi che si sfideranno a turno. La gara consiste nel proporre la corretta formula alla precisa richiesta dell'altro gruppo, ad esempio "scrivere una disequazione fratta di grado 2", oppure "scrivere un sistema di 3 disequazioni contenente almeno una disequazione lineare".

Proporre alla classe casi esercitativi volti al riconoscimento e alla rappresentazione sul piano cartesiano della risoluzione di disequazioni algebriche. Utilizzare due software didattici per svolgere le esercitazioni: [Astro Algebra](#) e [DERIVE for Windows](#).

Il software didattico [Astro Algebra](#) è utilizzabile per visualizzare la rappresentazione geometrica sul piano cartesiano della risoluzione delle disequazioni. Astro Algebra è un gioco ambientato nello spazio intergalattico, che negli ambienti esplorati dall'alunno-giocatore propone problemi da affrontare con l'uso dei concetti fondamentali dell'algebra: l'obiettivo del software è proprio quello di rendere meno astratte le formule algebriche dandone una rappresentazione visiva.

Ognuno dei tre ambienti/attività, *Varia Blox Station*, *Cargo Bay Station* e *Grapher Station*, è fruibile in due modalità: *On Duty*, ovvero in forma di domanda e risposta, e *Off Duty*, che consente la libera esplorazione dell'ambiente.

Altri ambienti del software offrono approfondimenti di vario genere quali l'opportunità di collegamento a siti internet su argomenti correlati, il calcolo di funzioni, e il manuale ipermediale in linea suddiviso per argomenti matematici quali "la scrittura di un problema in formula" o "la risoluzione di una disequazione".

Nonostante che il software sia in lingua inglese, il suo utilizzo risulta abbastanza immediato e semplice, anche grazie ad una interfaccia amichevole e giocosa.

Dalla stazione intergalattica con al centro i tre ambienti e la plancia di comando, ovvero il menù in basso, è possibile scegliere una delle attività in una delle due modalità possibili, on/off duty. L'ambiente/gioco **Grapher Station** in modalità *Off Duty*, nella immagine a destra, consente di risolvere e rappresentare graficamente sistemi di equazioni e disequazioni di primo grado. Sono visualizzabili fino a tre grafici contemporaneamente, contraddistinti da colori differenti, giallo, rosa e azzurro.



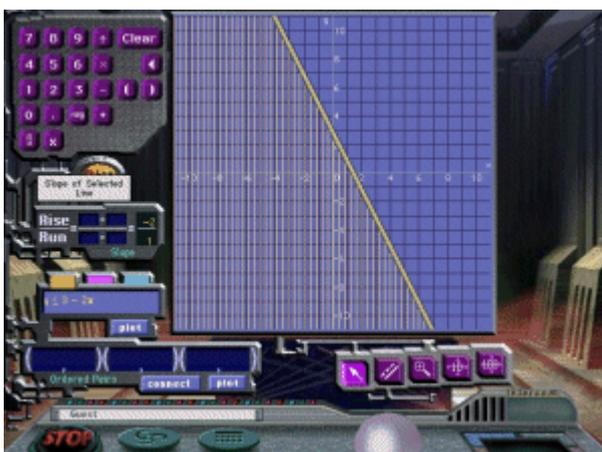
E' possibile anche leggere sul piano cartesiano l'**insieme intersezione** delle soluzioni di un sistema di disequazioni e di una disequazione fratta, quando siano riconducibili alla risoluzione di al massimo tre disequazioni.

Di seguito mostriamo un esempio di risoluzione grafica della disequazione

$$(3-2x)/(1-x) \geq 0$$

Leggiamo nelle immagini che seguono la rappresentazione della soluzione di due disequazioni. Nel software, nella esplicitazione della corrispondente formula algebrica si intende $y = 0$.

$$3-2x > 0$$



$$1-x > 0$$



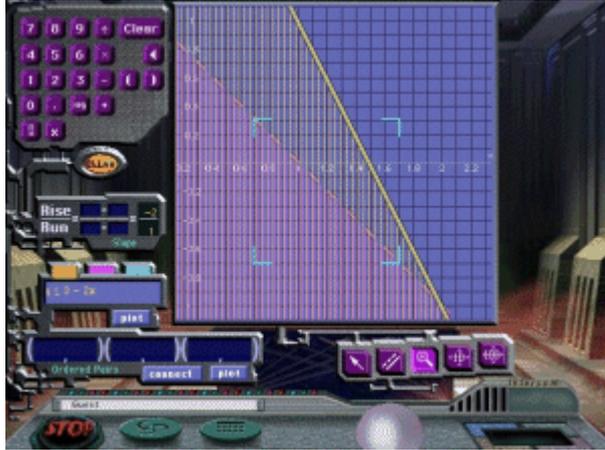
Qui sotto leggiamo la soluzione dei due sistemi di disequazioni sul piano cartesiano.

L'unione delle due soluzioni

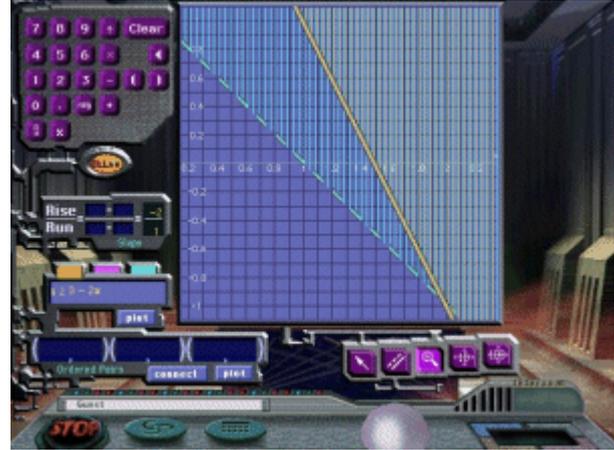
$$[3-2x >= 0 \text{ and } 1-x > 0] \text{ or } [3-2x <= 0 \text{ and } 1-x < 0]$$

è la soluzione della disequazione fratta data $(3-2x)/(1-x) >= 0$

$$\begin{aligned} 3-2x >= 0 \\ 1-x > 0 \end{aligned}$$



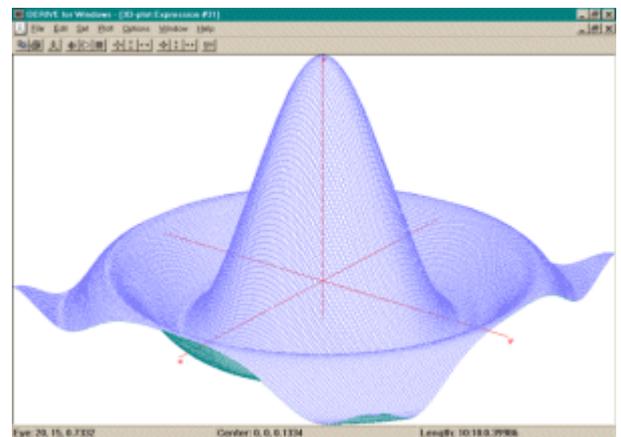
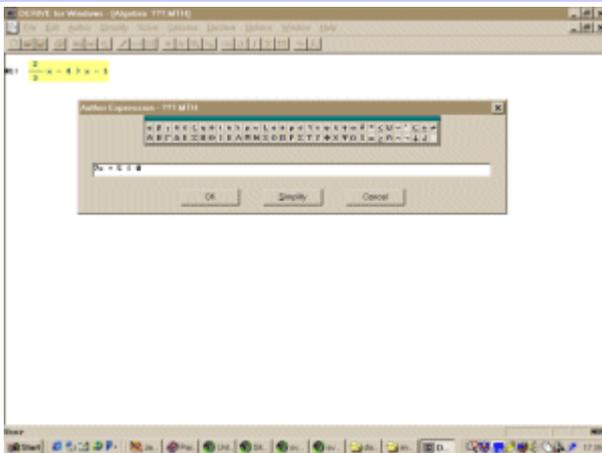
$$\begin{aligned} 3-2x <= 0 \\ 1-x < 0 \end{aligned}$$



[DERIVE for Windows](#) è un software didattico per lo studio della matematica in uso da molti anni, che esegue sia calcoli numerici che simbolici. *DERIVE*, nato sotto DOS e di cui oggi esiste anche la versione per Windows, è un ambiente aperto che include la tecnologia CAS (Sistema di Calcolo Algebrico) ormai incorporata anche in molte calcolatrici tascabili, e che fanno del software un vero e proprio assistente matematico per PC.

Con il software *DERIVE* i cui argomenti matematici spaziano dall'aritmetica fino al calcolo differenziale, è possibile tra l'altro impostare equazioni, disequazioni, sistemi di equazioni e risolverli algebricamente, oppure numericamente assegnando dei valori alle variabili. E' possibile salvare il lavoro in un file *.math*, per recuperarlo in un secondo momento.

Le soluzioni possono essere rappresentate graficamente nel piano cartesiano o nello spazio.



Occorre un pò di pratica per conoscere e utilizzare al meglio *DERIVE*: allo scopo è di valido aiuto il manuale fornito con il software, contenente spiegazioni sull'uso e le potenzialità di Derive e rivolto sia ai docenti che agli studenti.

Inoltre esiste una comunità d'apprendimento che comunica via Internet, proponendo commenti ed esercizi, e favorendo la diffusione e l'uso del software. *Derive* è citato anche nei libri di testo di matematica delle scuole superiori, come software di riferimento per esercitazioni e verifiche.



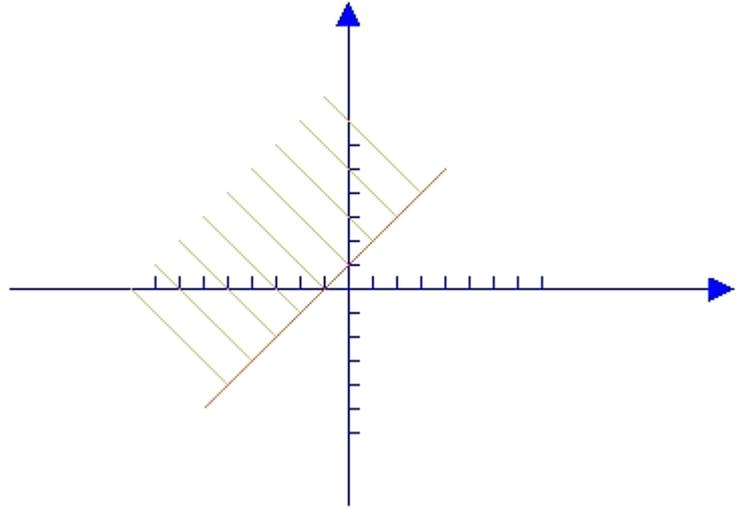
2.a Trova la disequazione corretta. Proporre alla classe una attività di verifica ed eventualmente utilizzare una calcolatrice tascabile che disegni i grafici per autoverificare la correttezza della risposta.

Evidenziare delle aree sul piano cartesiano e chiedere agli alunni di esaminarle ed esplicitare la disequazione o il sistema di disequazioni di cui ciascuna porzione di piano è soluzione. Far motivare ogni risposta.

Un esempio

Data l'area evidenziata in giallo, utilizzare le proprie conoscenze sulla pendenza di una retta e sui punti d'intersezione della retta con gli assi cartesiani, per individuare la disequazione che produce il grafico nell'immagine a fianco, descrivendo i passi del ragionamento.

[La soluzione è $y > x + 1$]



2.b Verifica con software didattico. Proporre delle disequazioni lineari e sistemi di disequazioni lineari da risolvere geometricamente su carta. Proporre di autoverificare le soluzioni con uno dei software utilizzati precedentemente, [Derive](#) e [Astro Algebra](#).

ESEGUI IL PERCORSO

Obiettivo 2 Interpretare geometricamente il formalismo algebrico delle disequazioni

Per il raggiungimento dell'obiettivo è consigliato svolgere le attività nella sequenza con cui sono proposte

Attività 1 Software didattico. Esercitazione con il software per riconoscere e rappresentare sul piano cartesiano la risoluzione di disequazioni algebriche:

- [Astro Algebra](#)
- [DERIVE for Windows](#)

Attività 2 Verifica con il software didattico.

ESEGUI IL PERCORSO

Obiettivo 3 Conoscere e utilizzare il calcolo algebrico per la risoluzione delle disequazioni

Per il raggiungimento dell'obiettivo è consigliato svolgere le attività nella sequenza con cui sono proposte

Attività 1 Deduzione e esplicitazione, tramite la discussione collettiva, del metodo algebrico di risoluzione delle disequazioni associato alla interpretazione grafica della soluzione sull'asse dei numeri reali.

Attività 2 Software didattico. Utilizzato per attività di esercitazione sulla risoluzione algebrica delle disequazioni:

- [DERIVE for Windows](#)

Attività 3 Verifica.



Proporre alla classe di dedurre, in base a quanto finora appreso e alle conoscenze pregresse, le regole del calcolo algebrico per la risoluzione di almeno una tipologia di disequazioni e di sistema di disequazioni.

Ciò consente al docente una trattazione più interattiva e coinvolgente dell'argomento.

Raccogliere le deduzioni degli allievi trascrivendole alla lavagna.

Giungere fino alla interpretazione grafica della soluzione sull'asse dei numeri reali, ovvero alla individuazione e visualizzazione dell'insieme delle soluzioni.

Tali deduzioni forniranno al docente la base per procedere ad una esplicitazione puntuale e sistematica sul procedimento per la risoluzione algebrica delle disequazioni e la lettura della soluzione sull'asse dei reali.



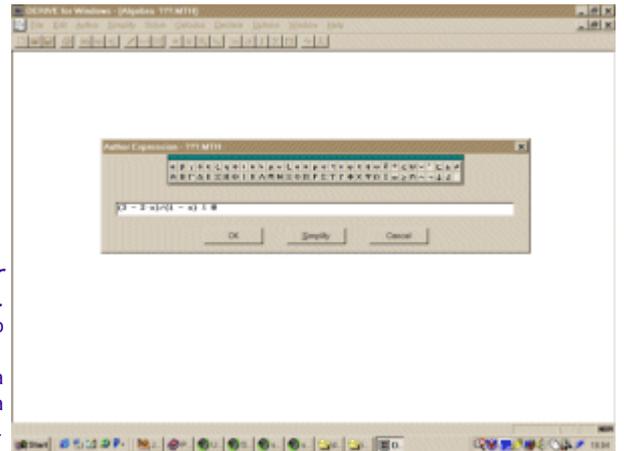
Proporre alla classe casi esercitativi volti alla risoluzione algebrica delle disequazioni. Utilizzare il software didattico [DERIVE for Windows](#) per verificare la soluzione determinata dall'allievo.

Disequazione

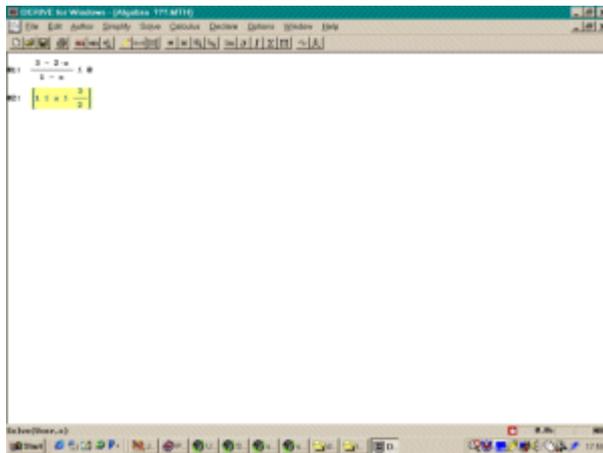
ESEMPIO

Ecco un esempio di risoluzione di una disequazione con *DERIVE for Windows*.

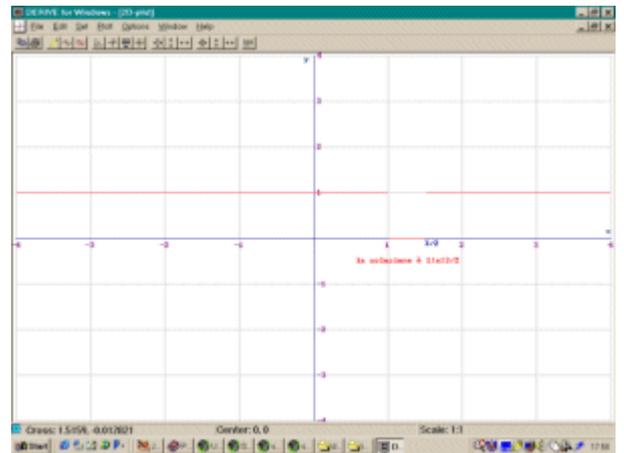
Dalla **esplicitazione della formula** della disequazione a fianco $(3-2x)/(1-x) \geq 0$, alla **semplificazione nella variabile x**, che determina la soluzione algebrica della disequazione data e la **rappresentazione geometrica della soluzione** stessa.



Soluzione algebrica



Soluzione geometrica





Ad esempio:

Proporre alcune disequazioni di cui si chiede la risoluzione algebrica e la esplicitazione grafica dell'insieme delle soluzioni.

Di ciascuna disequazione dare la rappresentazione geometrica della soluzione sul piano cartesiano.

- $3x - 4 = 0$
- $(3 - 2x)/(1 - x) \geq 0$
- $2/3x - 4 > x - 1$
- $3/(x + 1) < 3 + 5/(3 + 3x)$
- $4(x - 1) + 2(x - 3) \leq 3$